Correction Feuille Exercice 8

Utiliser les théorèmes d'éncadrement, étude de fonctions

Exercice 19 (théorème des gendarmes)
On cherche à démontrer le résultat de cours suivant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

.

1. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^x - 1$$

On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff e^x - 1 \geq 0 \\ &\iff e^x \geq 1 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors le tableau de variation pour la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variation précédent, la fonction f admet 0 pour minimum en 0. Donc

$$\boxed{x + 1 \leq e^x}$$

On pose maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + xe^x - e^x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

On a alors

$$g'(x) > 0 \iff xe^x > 0 \iff x > 0$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Comme précédemment, g admet 0 pour minimum en 0. On a donc

$$\boxed{e^x \leq 1 + xe^x.}$$

2. On repars de l'inégalité trouvée précédemment et on considère $x > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} 1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x &\iff x \leq e^x - 1 \leq xe^x \\ &\iff 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^x = 1$. Donc d'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

De la même façon,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

et donc la limite en 0 existe et

$$\boxed{\lim_{xto0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.}$$

Exercice 20 (*)

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + x \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

1. Pour déterminer l'ensemble de définition de f, on résout

$$1 - x = 0 \iff x = 1$$

On a donc

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$$

2. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} 1 - x = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{1-x} = -\infty$ et par conséquent

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$$

et finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 1.}$$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} 1 - x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{1-x} = +\infty$ et par conséquent

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) = +\infty$$

et finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty.}$$

Les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes donc f n'a pas de limite en 1.

3. On a
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-x}=0$$
et donc
$$\lim_{x\to-\infty}\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)=1$$
Ainsi
$$\lim_{x\to-\infty} x\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)=-\infty$$
et donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.}$ De plus
$$\lim_{x\to+\infty} x\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)=+\infty$$
et donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$

4. En utilisant le changement de variable $X=\dfrac{1}{1-x}$. On a donc quand $x\to+\infty$, $X\to 0$ et $1-x=\dfrac{1}{X}\iff x=1-\dfrac{1}{X}$. Ainsi,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\left(\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)-1\right) &= \lim_{X\to0}\left(1-\frac{1}{X}\right)\left(e^X-1\right)\\ &= \lim_{X\to0}\left(e^X-1\right)-\frac{e^X-1}{X}\\ &= \lim_{X\to0}\left(e^X-1\right)-\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}\\ &\boxed{= 0 - 1 = - 1}\end{aligned}$$

Exercice 21 (**)
Soit la fonction $f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{3}{|x|}}, \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (donc le domaine de définition est symétrique). De plus pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,
$$f(-x)=(-x)\times e^{-\frac{3}{|-x|}}=-xe^{-\frac{3}{|x|}}=-f(x)$$
Donc,
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

2. Par disjonction de cas, soit $x>0$, alors dans ce cas $f(x)=xe^{-\frac{3}{x}}$. La fonction f est dérivable et
$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{-\frac{3}{x}}+x\times\frac{3}{x^2}e^{-\frac{3}{x}}\\ &=\left(1+\frac{3}{x}\right)e^{-\frac{3}{x}}\\ &=\left(1+\frac{3}{|x|}\right)e^{-\frac{3}{|x|}}\end{aligned}$$
Soit $x<0$, alors dans ce cas $f(x)=xe^{\frac{3}{x}}$. La fonction f est dérivable et
$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{\frac{3}{x}}-x\times\frac{3}{x^2}e^{\frac{3}{x}}\\ &=\left(1-\frac{3}{x}\right)e^{\frac{3}{x}}\\ &=\left(1+\frac{3}{|x|}\right)e^{-\frac{3}{|x|}}\end{aligned}$$

Dans tout les cas

$$\boxed{\forall x \neq 0,\ f'(x) = e^{-\frac{3}{|x|}}\left(1 + \frac{3}{|x|}\right).}$$

3. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

4. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |x| = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{3}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{|x|}} = 1$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

Exercice 22 (***)

On définit la fonction partie entière E par : $\forall x \in \mathbb{R}, E[x] = n$ où n est l'unique entier tel que $n \leq x < n+1$.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bornée sur tout intervalle de longueur 1.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$.

   On se fixe $\epsilon > 0$.

   (a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$, d'après la définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $|f(x+1) - f(x)| \leq \epsilon$.

   (b) On pose $m = E[x - A]$. On a donc par définition de la partie entière,

$$x - A \geq m \Longleftrightarrow x - m \geq A$$

   Ainsi

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x-m)| &= \left|\sum_{k=0}^{m-1} f(x-m+k+1) - f(x-m+k)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} |f(x-m-k+1) - f(x-m+k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon \\
&\boxed{\leq m\varepsilon}
\end{aligned}$$

   (c) On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \left|\frac{f(x) - f(x-m) + f(x-m)}{x}\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x) - f(x-m)}{x}\right| + \left|\frac{f(x-m)}{x}\right|
\end{aligned}$$

Or $x-m \in [A; A+1]$ donc $\left|\frac{f(x-m)}{x}\right| \leq \frac{M}{x}$. Donc

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{m\varepsilon}{x} + \frac{M}{x}$$

Of $m \leq x - A \leq x$ donc

$$\boxed{\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{M}{x} + \varepsilon.}$$

(d) Attention ! Dans cette question on prend un nouvel ε. Soit $\varepsilon > 0$, on pose alors $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe alors $A_2 > 0$ tel que pour tout $x > A_2$,

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{M}{x} + \varepsilon_2$$

(En reprenant toutes les questions précédentes pour ε_2). Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{M}{x} = 0$. Donc d'après la définition, il existe A_3 tel que pour tout $x > A_3$,

$$\frac{M}{x} \leq \varepsilon_2$$

Ainsi, en choisissant $A_f = max(A_2, A_3)$, pour tout $x > A_f$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$$

C'est la définition de la limite donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.}$$

2. On suppose que $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = l \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) = l &\iff f(x+1) - f(x) - l = 0 \\ &\iff f(x+1) - (x+1)l - (f(x) - xl) = 0 \\ &\iff g(x+1) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

en posant la fonction $g : x \to f(x) - xl$. La fonction g vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} g(x+1) - g(x) = 0$$

Donc d'après la partie précédente, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= \frac{f(x) - xl}{x} \\ &= \frac{f(x)}{x} - l \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - l = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l}$$

3. En prenant $f(x) = \ln(x)$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

   On en déduit donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.}$$